Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Das Spiel „Set!“

Das Kartenspiel „Set!“ [1], mit dem wir uns in unserer Arbeit beschäftigen, besteht aus 81 verschiedenen Karten. Die auf den Karten abgebildeten Symbole haben vier Eigenschaften mit jeweils drei Varianten (Tabelle):

Eigenschaft	**Variante**
Anzahl der Symbole	1, 2 oder 3
Farbe der Symbole	grün, lila oder rot
Form der Symbole	Rechteck, Tilde oder Ellipse
Füllung der Symbole	Ausgefüllt, gepunktet oder leer

Ein „Set“ besteht aus genau 3 Karten (deren Reihenfolge beliebig ist), die in jeder Eigenschaft (jede Eigenschaft für sich gesehen) genau gleich oder völlig unterschiedlich sind.

1. Karte: 1 Symbol,	grün,	Tilde,	gepunktet
2. Karte: 3 Symbole,	rot,	Tilde,	ausgefüllt
3. Karte: 2 Symbole,	lila,	Tilde,	leer

Es liegt in nebenstehender Tabelle ein Set vor, weil die Anzahl der Symbole völlig unterschiedlich ist <u>und</u> die Farben völlig unterschiedlich sind <u>und</u> die Formen genau gleich sind <u>und</u> die Füllungen völlig unterschiedlich sind.

1. Karte: 3 Symbole,	lila,	Rechtecke,	leer
2. Karte: 3 Symbole,	rot,	Rechtecke,	gepunktet
3. Karte: 3 Symbole,	lila,	Rechtecke,	ausgefüllt

Hier liegt <u>kein</u> Set vor, denn für eine der Eigenschaften (die Farbe) trifft die Setdefinition nicht zu. Daß sie für alle anderen Eigenschaften zutrifft, spielt dann keine Rolle mehr.

Das eigentliche Spiel besteht darin, daß 12 Karten ausgelegt werden. Sobald ein Spieler (Anzahl der Spieler beliebig; alle spielen gleichzeitig) ein Set gefunden hat, ruft er „Set!“ und nimmt sich die drei Karten, die das Set bilden, woraufhin die Kartenauslage wieder auf 12 Karten ergänzt wird. Wenn alle 81 Karten aufgebraucht sind und kein Set mehr in der Auslage vorhanden ist, gewinnt der Spieler, der die meisten Sets erkannt hat.

1.2 Ausgangspunkt unserer Überlegungen

Die Spielpraxis zeigt, daß es vorkommen kann, daß in den 12 ausgelegten Karten kein Set vorliegt. Die Spielanleitung [2] verweist in diesem Fall darauf, 3 weitere Karten auszulegen und somit die Auslage „kurzfristig“ aus 15 Karten bestehen zu lassen, „die nach dem nächsten Set nicht wieder ergänzt werden“. Die Anleitung sagt jedoch nichts darüber aus, ob in 15 beliebig gewählten Karten immer ein Set vorhanden ist. Durch Ausprobieren stellten wir fest, daß dies nicht der Fall ist; wir fanden 18 Karten ohne Set. Das brachte uns dazu, uns genauer mit diesem Thema zu beschäftigen.

1.3 Fragestellungen

Unsere Leitfrage ergab sich aus dem oben erläuterten Zusammenhang:

- Wie viele Karten muß man mindestens auslegen, um bestimmt ein Set zu erhalten?

  Wenn man nun eine Karte weniger als diese Minimalzahl auslegt, so darf nicht in jedem Fall ein Set vorhanden sein, sonst wäre die Minimalzahl kleiner. Es handelt sich also um die *größte* Kartenzahl, die man ohne Set auslegen kann – bei der Minimalzahl ist nämlich auf jeden Fall ein Set vorhanden. Unser Problem ist also auch gelöst, wenn wir folgende Frage beantwortet haben:

  Wie viele Karten kann man maximal auswählen, ohne daß drei dieser Karten ein Set bilden?

Im Verlaufe unserer Untersuchungen ergab sich weitere Fragestellungen in bezug auf die Leitfrage:

- Was passiert, wenn man das Set-Spiel geringfügig abändert (andere Anzahl von Eigenschaften bzw. Varianten oder beides gleichzeitig verändert)?

2 Definitionen und Verallgemeinerungen

2.1 Eigenschaft

Als Eigenschaft werden bei dem normalen Spiel *Anzahl*, *Farbe*, *Form* und *Füllung* bezeichnet. Bei Erweiterungen könnten neue Eigenschaften, wie etwa *Hintergrundfarbe* hinzugefügt werden oder auch einige weggelassen werden. Uns kommt es bei Eigenschaften aber nicht darauf an, welche es gibt, da man diese beliebig austauschen kann, sondern wie viele es gibt. Die Anzahl der Eigenschaften bezeichnen wir mit n, für das normale Spiel gilt also n=4. Die Eigenschaften werden beliebig durchnumeriert, so daß jeder Zahl von 1 bis n genau eine Eigenschaft und jeder Eigenschaft genau eine Zahl zugeordnet ist.

2.2 Variante

Varianten sind Zustände der Eigenschaften. Bei der Eigenschaft *Farbe* gibt es zum Beispiel die Varianten rot, lila und grün. Die Anzahl der Varianten ist bei jeder Eigenschaft gleich und wird mit v bezeichnet, für das normale Spiel gilt also v=3. Die Varianten jeder Eigenschaft werden so durchnumeriert, daß jeder Zahl von 0 bis v-1 genau eine Variante und jeder Variante eine Zahl zugeordnet ist.

2.3 Darstellung von Karten als Wort

Jede Karte läßt sich eindeutig als n-buchstabiges Wort über das Alphabet von 0 bis v-1 darstellen, indem als Buchstabe an die Stelle i die vorliegende Variante derjenigen Eigenschaft gesetzt wird, die der Zahl i zugeordnet ist. Beim Set-Spiel gibt es also die Karten 0000 bis 2222. Diese Schreibweise entspricht einer Darstellung der Zahlen 0 bis 80 im Dreiersystem.

Bei v Varianten können die Karten dementsprechend in einem Zahlensystem zur Basis v dargestellt werden. Diese Darstellung ist eindeutig, da die Variante jeder Eigenschaft durch eine Ziffer dargestellt wird, und zwei Karten daher nur dann gleich notiert werden, wenn sie in allen Eigenschaften übereinstimmen.

2.4 Größe des Set-Spiels

Das verallgemeinerte Spiel mit beliebigen n und v besteht aus v^n verschiedenen Karten, da bei jeder der n Eigenschaften genau v Varianten möglich sind.

2.5 Geometrische Darstellung

Man kann die Karten eines Set-Spiels mit n Eigenschaften in einem n-dimensionalen „Würfel“ darstellen, dessen Punkte nur natürlichzahlige Koordinaten aufweisen. In eine Ecke des Würfels legen wir den Ursprung eines Koordinatensystems, dessen n Achsen entlang der Kanten des Würfels verlaufen. Da wir jede der v Varianten einer Eigenschaft mit ganzen Zahlen von 0 bis v-1 bezeichnen können (siehe 2.2), können wir demnach jede der n Eigenschaften auf jeweils einer der n Achsen abtragen. Jede Karte wird also durch einen Punkt dargestellt, dessen Koordinaten den Varianten entsprechen.

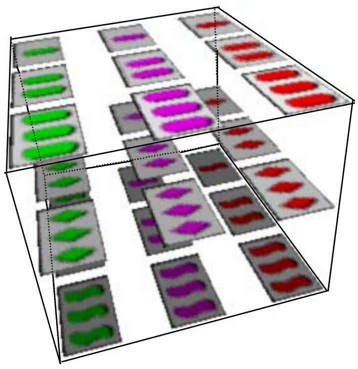

Abbildung 1 [4]: *Geometrische Darstellung des Set-Spiels mit drei Eigenschaften und drei Varianten in einem dreidimensionalen Würfel (siehe auch Titelbild/Deckblatt)*

00	**01**	**02**
10	**11**	**12**
20	**21**	**22**

Abbildung 2: *Geometrische Darstellung eines Set-Spiels mit zwei Eigenschaften und drei Varianten in der Ebene*

In Abbildung 1 wird ein Set-Spiel mit drei Eigenschaften und drei Varianten in einem dreidimensionalen Würfel dargestellt. Um die Einsicht zu erleichtern, sind die Karten in dieser Abbildung selbst und noch nicht als Punkte dargestellt. Deutlich erkennbar ist, daß sich dieser Würfel aus drei Ebenen (oben, Mitte, unten; aber auch: links, Mitte, rechts; oder: hinten, Mitte, vorne), in denen jeweils neun Karten liegen, zusammensetzt.

Die in Abbildung 2 dargestellte Ebene wurde in v^2 (=9) Felder aufgeteilt, so daß jede Karte genau einem Feld zugeordnet ist und umgekehrt. Zusätzlich wurden die Felder mit den zugehörigen Karten in der Wortdarstellung (siehe 2.3) bezeichnet. Wegen dieser Darstellungsform verwenden wir in unserer Arbeit auch den Ausdruck „Felder belegen“, wenn wir die zugehörigen Karten auswählen.

Um einen n-dimensionalen Würfel, in dem sich die Karten eines Setspiels anordnen lassen, auf möglichst einfache Weise darzustellen, projizieren wir diesen auf die (Zeichen-)Ebene. Dabei werden mehr als zwei Dimensionen dadurch dargestellt, daß jeweils v Schichten der (v-1)-ten Dimension abgebildet werden. So wurden bei der Projektion des dreidimensionalen Set-Würfels (Abbildung 3) die drei in ihm vorhandenen parallelen Ebenen nebeneinander dargestellt. Bei vier Eigenschaften ergibt sich ein vierdimensionaler Würfel, der sich aus drei dreidimensionalen parallelen Karten-„Schichten“ zusammensetzt. Bei der Projektion in der Ebene stellen wir diese drei „Schichten“ untereinander dar. Beim Schluß auf ungerade n werden also bei der Projektion drei (n-1)-dimensionale Schichten nebeneinander dargestellt, beim Schluß auf gerade n hingegen untereinander.

000	001	002
010	011	012
020	021	022

2-dimensionale Ebene

100	101	102
110	111	112
120	121	122

2-dimensionale Ebene

200	201	202
210	211	212
220	221	222

2-dimensionale Ebene

Abbildung 3: *Projektion des dreidimensionalen Set-Würfels (n=3, v=3) auf die Zeichenebene*

2.6 Sets

Beim normalen Set-Spiel (mit v=3) besteht ein Set aus 3 Karten, bei denen für jede Eigenschaft gilt, daß sie gleich oder ganz unterschiedlich sind. Mit der Menge {0001, 1021, 2011} liegt also ein Set vor.

Diese Set-Definition läßt sich auf beliebige Variantenzahlen verallgemeinern, indem man unter einem Set v Karten versteht, die diese Bedingung erfüllen. Wenn sich die Varianten einer Eigenschaft in einem Set unterscheiden, kommt auf diese Weise nämlich jede Variante genau einmal vor. *Beispiel für n=3, v=4:* {010, 130, 320, 200}. Bei jedem v>1 müssen sich die Karten eines Sets in mindestens einer Eigenschaft unterscheiden, denn jede Karte kommt nur einmal vor. Außerdem gilt folgender

Satz: Bei v=3 gilt, daß zu zwei beliebigen verschiedenen Karten genau eine dritte existiert, die mit den beiden ein Set bildet.

Beweis durch Konstruktion: Jede Eigenschaft wird für sich allein betrachtet. Stimmen die Varianten beider vorgegebener Karten überein, so muß auch die setbildende Karte in dieser Eigenschaft die gleiche Variante aufweisen. Unterscheiden sich die beiden vorgegebenen Karten in der betrachteten Eigenschaft, so muß die setbildende Karte in dieser Eigenschaft die noch nicht verwendete Variante annehmen, so daß sich alle drei Karten in dieser Eigenschaft unterscheiden.

2.7 Diagonalen

Die auf den Raumdiagonalen des n-dimensionalen Würfels jeweils liegenden Karten unterscheiden sich in jeder Eigenschaft (und bilden daher ein Set, siehe 2.6). Wir bezeichnen aber auch jedes andere Set, dessen Karten sich in jeder Eigenschaft unterscheiden, als Diagonale (siehe Abbildung 4 für Beispiele in der Ebene, Abbildung 5 für Beispiele im dreidimensionalen Würfel). Jede Diagonale enthält wie ein Set (siehe 2.6) genau v Karten.

X	Y	
	X	Y
Y		X

Abbildung 4: *Nicht nur die mit ‚X‘ markierten Felder bilden eine („herkömmliche“) Diagonale, nach unserer Definition liegen auch die ‚Y‘-Karten auf einer Diagonalen.*

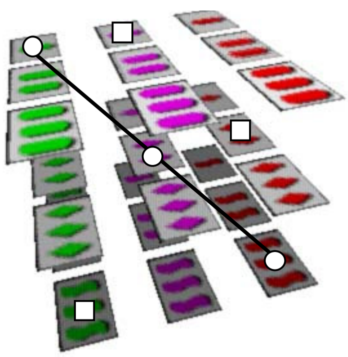

Abbildung 5: *Zwei Beispiele für Diagonalen im dreidimensionalen Würfel (bei v=3); die mit Kreisen markierten Karten stellen eine Raumdiagonale dar, laut unserer Definition bilden aber auch die mit Quadraten kenntlich gemachten Karten eine Diagonale.*

3 Geometrische Veranschaulichung für drei Varianten

Für v=3 zeigt das Set-Spiel deutliche Analogien zur mehrdimensionalen Geometrie auf: Das Set-Spiel läßt sich mit einem n-dimensionalen Raum vergleichen (siehe 2.5). Jede Eigenschaft stellt dabei eine Dimension dar, und es existieren Analoga zu Geraden, Ebenen und Hyperebenen. Um diese genau zu definieren, haben wir zunächst einen Hilfssatz aufgestellt.

3.1 Hilfssatz I für drei Varianten

Bei drei Varianten bilden drei Karten genau dann ein Set, wenn für jede Eigenschaft gilt, daß die Summe der vorliegenden Varianten durch 3 teilbar ist.

Beweis: Bei zwei verschiedenen Varianten (in bezug auf eine Eigenschaft) weist die setbildende Karte in bezug auf diese Eigenschaft die noch fehlende Variante auf (siehe 2.6). Jede der drei Zahlen 0, 1, 2 kommt daher genau einmal vor, die Summe ist immer 3 und somit durch 3 teilbar. Bei zwei gleichen Varianten (in bezug auf eine Eigenschaft) weist die setbildende Karte in bezug auf diese Eigenschaft ebenfalls diese Variante auf (siehe 2.6). Bei der Summenbildung wird also dreimal die gleiche Zahl addiert, die Summe ist demnach durch 3 teilbar.

Wählt man in einem der beiden Fälle *nicht* die setbildende Karte, so unterscheidet sich die Karte dementsprechend in mindestens einer Eigenschaft von der setbildenden Karte. In dieser Eigenschaft unterscheidet sich die Variante um 1 oder 2 von der der setbildenden Karte, da nur die Variantenwerte 0, 1, 2 und damit auch nur die Differenzen 0, 1, 2 vorkommen können; eine Differenz von 0 kommt hingegen nur bei Übereinstimmung der Varianten vor. Zwei Zahlen, die sich um 1 oder 2 unterscheiden, können aber nicht beide durch 3 teilbar sein.

Damit ist gezeigt, daß die Summe der Varianten *nicht* durch 3 teilbar ist, wenn *kein* Set vorliegt, und daß sie immer durch 3 teilbar ist, wenn ein Set vorliegt. Sie ist also genau dann durch 3 teilbar, wenn ein Set vorliegt.

3.2 Hilfssatz II für drei Varianten

Zu jedem Set $\{K_1, K_2, K_3\}$existiert ein Vektor, mit dem man K_1 in K_2, K_2 in K_3 und K_3 in K_1 überführen kann.

Beweis: Man bestimme den Vektor, mit dem man K_1 in K_2 überführt. Verschiebt man nun K_2 um diesen Vektor, so erhält man die setbildende Karte. Sind die beiden Varianten von K_1 und K_2 nämlich in einer Eigenschaft gleich, so ist die entsprechende Komponente des Vektors 0, die entstehende Karte weist also auch diese Variante auf. Sind die beiden Varianten von K_1 und K_2 verschieden, ist die entsprechende Komponente des Vektors +1 oder -1, die entstehende Karte weist also die dritte Variante auf. Demnach erfüllt jede Eigenschaft eine der für ein Set erforderlichen Bedingungen, es liegt ein Set vor.

Verschiebt man die so entstandene Karte K_3 nochmals um den Vektor, so hat man die Karte K_1 insgesamt dreimal um denselben Vektor verschoben, die Summe der einander entsprechenden Komponenten ist durch drei teilbar. Wegen des Modulorechnens ergibt sich also überall insgesamt die Komponente 0, man erhält wieder K_1, q.e.d.
Es existieren zu jedem Set zwei Vektoren, die die Bedingung des Hilfssatzes erfüllen, außer dem betrachteten ist das der entgegengesetzte Vektor mit den vom Betrag her gleichen Komponenten.

3.3 Geometrische Definitionen und Zusammenhänge

Unter einer *Geraden* wird eine Menge von drei Karten verstanden, die ein Set bilden. Da es zu zwei Karten immer genau eine dritte Karte gibt, die mit diesen ein Set bildet, wird eine Gerade durch zwei Karten charakterisiert. Das stimmt mit dem Geradenbegriff der mehrdimensionalen Geometrie überein: Durch zwei verschiedene Punkt läuft auch hier immer genau eine Gerade.

Auch die Parallelität von Geraden wird analog zur mehrdimensionalen Geometrie definiert: Zwei Geraden sind parallel, wenn sie durch eine (Parallel-) Verschiebung ineinander überführt werden können. Eine Verschiebung einer Geraden wird in der Geometrie durchgeführt, indem zu einer oder mehreren Koordinaten jedes Punktes ein Betrag addiert oder subtrahiert wird, der zwar für die unterschiedlichen Koordinaten verschieden sein kann, für die gleichen Koordinaten verschiedener Punkte jedoch identisch ist.

Beim Set-Spiel sind die einzelnen Koordinaten einer Karte die Buchstaben in der Darstellung der Karte als Wort. Verschiebt man nun allerdings eine Karte, müßte man zu jedem Buchstaben einen konstanten Betrag addieren bzw. davon subtrahieren. Tritt dabei ein negativer Wert oder ein Wert ≥ 2 auf, geht man wie in der Modulorechnung vor: Man betrachtet den natürlichen Rest der Summe beim Teilen durch drei. Dieser ist immer 0, 1 oder 2, es entstehen also immer gültige Karten.

Im Set-Spiel existieren nun pro Koordinate nur drei Möglichkeiten: Entweder man läßt die Koordinate unverändert, man erhöht sie um 1, oder man verringert sie um 1. Die Erhöhung um 2 ist aufgrund der Modulorechnung identisch mit der Verringerung um 1, die Verringerung um 2 ist identisch mit der Erhöhung um 1. Die Komponenten, die zu den einzelnen Eigenschaften beim Verschieben addiert werden, bilden ein Zahlentupel, einen Vektor.

Zwei Geraden sind nun parallel, wenn sie durch eine Verschiebung ineinander überführt werden können, also wenn jede Karte der ersten Geraden einer Karte der zweiten Geraden zugeordnet ist, so daß für jede Eigenschaft n gilt: Addiert man zur n-ten Koordinate der Karte auf der ersten Geraden das n-te Element des Vektors, so erhält man die n-te Koordinate der zugeordneten Karten auf der zweiten Geraden. Dabei muß man natürlich immer modulorechnen.

Verschiebt man eine Gerade zweimal mit demselben Vektor, so bildet jede Karte mit ihren so entstandenen Abbildern Sets. Wird eine Eigenschaft nämlich beim Verschieben nicht verändert, sind die Varianten der drei Karten hier gleich. Wird sie um 1 geändert, tritt die ursprüngliche Variante, die um 1 veränderte Variante und die um 2 veränderte Variante auf, und das sind drei verschiedene Werte. Da bei allen dieser Eigenschaften eine dieser Möglichkeiten eintritt, entsteht ein Set.

Zu einer Karte, die auf einer Geraden liegt und einer Karte, die auf einer dazu parallelen Geraden liegt, liegt die setbildende Karte immer auf der Geraden, die bei erneuter Verschiebung um den vorherigen Verschiebungsvektor entsteht. Wenn es sich nämlich bei der zweiten Karte um ein Abbild der ersten handelt, bildet das zweite Abbild das Set. Ansonsten ist die zweite Karte das erste Abbild einer anderen Karte der Ausgangsgerade. In dem Fall bildet das zweite Abbild der dritten Karte der Ausgangsgerade ein Set: Entweder hat man nämlich eine Eigenschaft bei der Verschiebung nicht geändert, dann sind auch danach noch alle Varianten gleich oder alle verschieden (vorher lag ein Set vor), oder man hat die Variante einer Eigenschaft um 1 in die eine Richtung, die der anderen um 1 in die andere Richtung verändert. Da die Summe der drei Varianten laut Hilfssatz I kongruent 0 mod 3 war und man 1 addiert und 1 subtrahiert hat, ist sie auch jetzt kongruent 0 mod 3, die Varianten der Eigenschaft sind alle gleich oder alle verschieden (Hilfssatz I). Da einer der Fälle bei jeder Eigenschaft vorliegt, liegt also ein Set vor.

Aus diesem Grund sprechen wir auch davon, daß diese drei Geraden, sofern sie unterschiedlich sind, ein Set bilden. Die Menge dieser drei verschiedenen Geraden bezeichnen wir als *Ebene*. Diese Definition stimmt auch mit der der mehrdimensionsalen Geometrie überein, denn auch da liegen parallele Geraden, die man mit demselben Vektor erzeugt, auf einer Ebene.

Ebenen sind in bezug auf Sets abgeschlossen, das heißt, daß zu zwei beliebigen Karten der Ebene die dritte setbildende Karte auch auf der Ebene liegt: In den Geraden ist das der Fall - sie sind Sets -, und zwischen den Geraden liegt der eben erläuterte Fall vor, der Satz wurde hergeleitet. Liegt ein Set zwischen den Geraden vor, so nennt man es *geradenübergreifend*.

Auch Ebenen können mit Vektoren verschoben werden, der Begriff der Parallelität gilt genau wie bei Geraden. Nach dem gleichen Prinzip, wie eben durchgeführt, kann man zeigen, daß auch zu zwei Karten zweier paralleler Ebenen die setbildende Karte in einer dritten, um den selben Vektor verschobenen Ebene liegt. Man spricht wieder davon, daß diese drei Ebenen ein Set bilden, die Sets zwischen den Ebenen heißen *ebenenübergreifend*. Eine Menge von Ebenen, die ein Set bilden, nennt man *dreidimensionale Hyperebenen*. Auch diese sind in bezug auf Sets abgeschlossen. Analog kann man auch hier die Parallelität und die Aussage „dreidimensionale Hyperebenen bilden Sets“ definieren.
Da man das Schritt für Schritt weiterführen kann, definieren wir allgemein:
Unter einer *n-dimensionalen Hyperebene* wird eine Menge von drei verschiedenen parallelen (n-1)-dimensionalen Hyperebenen verstanden, die ein Set bilden.
Die Parallelität, hyperebenenübergreifende Sets und die Aussage „Hyperebenen bilden Sets“ werden dabei definiert, wie es für Geraden, Ebenen und dreidimensionale Hyperebenen schon durchgeführt wurde.

3.4 Einordnung des Set-Spiels in einen affinen Raum

Die geometrische Darstellung des Set-Spiels ist sinnvoll, weil es sich beim Set-Spiel mit n Eigenschaften um einen affinen Raum der Dimension n handelt, wenn man die Menge der Karten als Punktmenge, die Menge der Sets als Geradenmenge und die Beziehung „Karte gehört zu Set“ als Inzidenzstruktur auffaßt und die Parallelrelation wie in 3.3 definiert.

Wir zeigen zunächst, daß es sich um einen affinen Raum handelt, und dann, daß seine Dimension mit der Eigenschaftszahl des Set-Spiels übereinstimmt.

Laut [7] liegt ein affiner Raum dann vor, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

„A1) Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Verbindungsgerade.“

Diese Bedingung wird vom Set-Spiel erfüllt, da zu zwei beliebigen Karten genau eine setbildende Karte und somit genau ein Set existiert.

„A2) Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P gibt es genau eine Gerade l mit P inzident l und g parallel l.“

Man kann die Karte P als verschobenes Abbild einer der Karten des Sets g betrachten und den Verschiebevektor bestimmen. Verschiebt man jetzt die beiden anderen Karten des Sets ebenfalls mit diesem Vektor, so hat man ein paralleles Set l.

Man kann nun P als Abbild jeder der drei Karten von g ansehen. Ausgehend von einer Karte K_1 kann man die anderen beiden Karten erhalten, indem man eine Verschiebung um einen der Set-Vektoren $\vec{S}$ bzw. den entgegengesetzten Vektor $-\vec{S}$ verschiebt. Der Vektor von den beiden Karten zu P ist demnach die Summe aus $-\vec{S}$ bzw. $\vec{S}$ und dem Vektor von K_1 zu P. Jede der drei Karten wird also auf das vorherige Abbild der Karte abgebildet, die durch Verschiebung von K_1 mit einem der Setvektoren entsteht, die also auch zu g gehört. Die drei entstehenden Karten sind also die gleichen wie wenn P als Abbild von K_1 angesehen wird. Es gibt also nur ein paralleles Set zu g durch P.

„A3) Ist {A, B, C} ein Dreieck und sind P, Q verschiedene Punkte mit $\overrightarrow{AB}$ parallel $\overrightarrow{PQ}$, so schneiden sich die Parallelen $\overrightarrow{AC}$ durch P und zu $\overrightarrow{BC}$ durch Q in einem Punkt R.“

Beim Verschieben eines Sets ändern sich die Vektoren zwischen zwei Karten nicht. Da $\overrightarrow{PQ}$ parallel zu $\overrightarrow{AB}$ ist, muß der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ also auch einer der Setvektoren des Sets mit A und B sein. Es gilt:

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$ oder 2) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{PQ}$

Unter $\vec{P}$ wird der Ortsvektor des Punktes P verstanden, also ein Vektor, dessen Komponenten den Koordinaten des Punktes P entsprechen.

Es gilt: $\vec{A} + \overrightarrow{AP} = \vec{P}$. Nun nehmen wir eine Fallunterscheidung zwischen den beiden Fällen vor:

1) Es ergibt sich bei Addition von $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} = \vec{P} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{B} + \overrightarrow{AP} = \vec{P} + \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \vec{B} + \overrightarrow{AP} = \vec{Q}$$

Verschiebt man den Punkt Q um einen der Setvektoren des zu $\overrightarrow{BC}$ parallelen Sets durch Q, so ergibt sich ebenfalls ein Punkt dieses Sets, er heiße S_1. Da $\overrightarrow{BC}$ Setvektor jedes zu $\overrightarrow{BC}$ parallelen Sets ist, gilt also:

$$\vec{S_1} = \vec{Q} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \vec{S_1} = \vec{B} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BC} = \vec{C} + \overrightarrow{AP}$$

Verschiebt man den Punkt P um einen der Setvektoren des zu $\overrightarrow{AC}$ parallelen Sets durch P, so ergibt sich ebenfalls ein Punkt dieses Sets, er heiße S_2. Da $\overrightarrow{AC}$ Setvektor jedes zu $\overrightarrow{AC}$ parallelen Sets ist gilt also:

$$\vec{S_2} = \vec{P} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \vec{S_2} = \vec{A} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC} = \vec{C} + \overrightarrow{AP}$$

2) Es ergibt sich aus $\vec{A} + \overrightarrow{AP} = \vec{P}$ durch Subtraktion von $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{A} + \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = \vec{P} - \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{A} + \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = \vec{P} + \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \vec{A} + \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = \vec{Q}$$

Da man modulo 3 rechnet, kann man einen beliebigen Vektor auf einer Seite dreifach addieren, ohne daß sich an der Summe etwas ändert. Addiert man links 3 $\overrightarrow{AB}$, so ergibt sich:

$$\vec{A} + \overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{Q} \Leftrightarrow \vec{B} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} = \vec{Q}$$

Verschiebt man den Punkt Q nun zweimal um einen der Setvektoren des zu $\overrightarrow{BC}$ parallelen Sets durch Q, so ergibt sich wiederum ein Punkt dieses Sets, er heiße S_1. Da $\overrightarrow{BC}$ Setvektor jedes zu $\overrightarrow{BC}$ parallelen Sets ist gilt also:

$$\vec{S_1} = \vec{Q} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{B} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{C} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC}$$

Verschiebt man den Punkt P nun zweimal um einen der Setvektoren des zu $\overrightarrow{AC}$ parallelen Sets durch Q, so ergibt sich wiederum ein Punkt dieses Sets, er heiße S_2. Da $\overrightarrow{AC}$ Setvektor jedes zu $\overrightarrow{AC}$ parallelen Sets ist gilt also:

$$\vec{S_2} = \vec{P} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{A} + \overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{C} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC}$$

In beiden Fällen sind also S_2 und S_1 identisch, es existiert ein Punkt, der sowohl auf dem zu $\overrightarrow{BC}$ parallelen Set durch Q als auch auf dem zu $\overrightarrow{AC}$ parallelen Set durch P liegt, diese beiden Sets schneiden sich also in einem Punkt R.

„A4) Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte.“

Dieses Axiom ist erfüllt, da jedes Set drei Karten hat.

Da jeder affine Raum eine Basis B hat (vgl. [7]), ist die Dimension eines affinen Raumes als |B|-1 definiert [6]. Nun läßt sich durch vollständige Induktion beweisen, daß die Zahl der Eigenschaften mit der Dimension des Set-Spiels übereinstimmt:

Induktionsanfang: Bei 0 Eigenschaften gibt es nur eine Karte, diese ist ihre eigene Hülle, d.h. die Basis hat die Mächtigkeit 1, somit hat das Set-Spiel die Dimension 0, was mit der Eigenschaftszahl übereinstimmt.

Induktionsschluß: Erweitert man das Set-Spiel um eine Eigenschaft von n auf n+1 Eigenschaften, so geschieht dies, indem man das Set-Spiel mit n Eigenschaften dreimal abbildet, je einmal für jede der drei Varianten. Wenn nun n+1 Karten die Basis für ein n-dimensionales Set-Spiel - also eine dieser Schichten - bildet, so reichen n+1 Karten also nicht als Basis für das n+1-dimensionale Set-Spiel.

Man muß also einen weiteren Punkt hinzufügen, der in einer der anderen beiden Schichten liegt. Die Hülle um die so erweiterte Punktmenge enthält natürlich die Schicht mit den n+1 ausgewählten Karten, aber auch die dritte Schicht, den jede Karte dieser Schicht bildet mit der hinzugefügten Karte und einer Karte der ersten Schicht ein Set. Da wie in jedem Teilraum auch in der Hülle zu je zwei Karten das gesamte Set enthalten sein muß, müssen also alle Karten der dritten Schicht in der Hülle enthalten sein. Die fehlenden Karten der zweiten Schicht bilden mit einer Karte der ersten und einer Karte der dritten Schicht ein Set, müssen also auch zur Hülle gehören. Die Hülle um die n+2 Karten umfaßt also das gesamte Set-Spiel. Da n+1 Karten nicht als Basis ausreichen, umfaßt die Basis also n+2 Karten. Das Set-Spiel mit n Eigenschaften hat also n+1 Dimensionen. So ist ausgehend von 0 der Schluß auf jedes natürliche n möglich.

Das Set-Spiel mit n Eigenschaften und drei Varianten ist also ein affiner Raum der Dimension n.

Da der Raum auf Z_3^n aufgebaut ist, läßt sich die Frage nach der maximalen Kartenzahl ohne Set läßt also geometrisch umformulieren:

Wie groß ist die größte Zahl von Punkten eines affinen Raumes über Z_3^n, von denen höchstens zwei auf einer Geraden liegen?

3.5 Hilfssatz III: Verschieben und Vertauschen bei drei Varianten

Bei der geometrischen Darstellung des Set-Spiels handelt es sich lediglich um ein Modell. Das Ziel ist es, Sets durch Geraden in einem n-dimensionalen Würfel geometrisch zu veranschaulichen. Als geometrische Darstellung wurde also ein Darstellungsprinzip gewählt, das diese Bedingung erfüllt. Man kann die Positionen der Punkte im n-dimensionalen Würfel allerdings auch verändern, so daß ebenfalls jedes Set durch eine Gerade dargestellt wird, also eine isomorphe Abbildung vorliegt. Wir wollen jetzt zwei solche Veränderungsmöglichkeiten zeigen, bei denen auch nach der Veränderung eine solche geometrische Darstellung vorliegt:

(1) Zwei parallele (n-1)-dimensionale Hyperebenen werden vertauscht.
(2) Man bildet zwei parallele (n-1)-dimensionale Hyperebenen jeweils auf sich selbst ab, indem man eine um 1 in eine Richtung, die andere um 1 in die entgegengesetzte Richtung verschiebt.

Da eigentlich auch beim Vertauschen der Fall vorliegt, daß eine Ebene in die eine, eine in die andere Richtung verschoben wird, werden die Fälle zusammen betrachtet.

Im folgenden zeigen wir, daß die Veränderungsprinzipien die erforderlichen Bedingungen erfüllen und in den so entstandenen Darstellungen Sets auch weiterhin durch Geraden veranschaulicht werden. Das ist genau dann der Fall, wenn einerseits die Karten jeder Geraden ein Set bilden; andererseits aber drei Karten, die nicht auf einer Geraden liegen, kein Set bilden. Die Karten auf drei Positionen, auf denen vorher Karten lagen, die ein Set bildeten, müssen also auch nach der Veränderung ein Set bilden; die Karten auf drei Positionen, auf denen vorher Karten lagen, die kein Set bildeten, dürfen also auch nach der Veränderung kein Set bilden. Das ist bei den Prinzipien der Fall:

Zum Nachweis betrachten wir nun zunächst ein Set. Lag es vor der Veränderung vollständig in einer der beiden vertauschten bzw. verschobenen Hyperebenen, so wurde es vollständig verschoben und liegt demnach auch weiterhin auf einer Geraden (verschiebt man eine Gerade, so entsteht laut 3.3 eine parallele Gerade).

Lagen die drei Karten vor der Verschiebung nicht in einer Hyperebene, so ist das Set hyperebenenübergreifend, aus jeder der drei parallelen Hyperebenen stammt eine Karte. Man verschiebt jetzt eine der Hyperebenen in die eine, die andere in die andere Richtung. Wird also die Variante einer Eigenschaft bei der Verschiebung nicht verändert, so ist sie auch nach der Verschiebung bei allen drei Karten entweder gleich oder verschieden.

Wird die Variante bei der Verschiebung um 1 verändert, so wird sie bei einer der drei Karten um 1 erhöht, bei einer um 1 vermindert, daß heißt die Summe (modulo 3) bleibt gleich. Da sie laut Hilfssatz I vorher durch drei teilbar war, ist sie es auch jetzt noch. Das wiederum heißt laut Hilfssatz I, daß die Varianten der drei Karten in bezug auf diese Eigenschaft entweder gleich oder verschieden sind.

Da einer dieser Fälle bei jeder Eigenschaft auftreten muß, bilden die drei Karten auch nach der Verschiebung ein Set. Sowohl ein hyperebenenübergreifendes Set als auch ein Set in einer Hyperebene bleibt also ein Set; da es nicht mehr Geraden als vorher sind, symbolisieren also auch alle Geraden Sets.

Beim Verschieben und Vertauschen ändert sich die Zahl der ausgewählten Karten nicht. Auf der Suche nach der Maximalzahl von Karten ohne Set könne Kartenkombinationen, die durch Verschieben und Vertauschen ineinander überführt werden können, also als gleich angesehen werden.

4 Weitere Hilfssätze

4.1 Hilfssatz IV für drei Varianten

Liegen auf einer dreidimensionalen Hyperebene mindestens sechs Karten, so existiert eine Ebene, auf der sich vier dieser Karten befinden.

Beweis durch Widerspruch:

Wir gehen davon aus, daß eine Kartenkombination mit sechs oder mehr Karten existiert, in der auf keiner Ebene mehr als drei Karten liegen. Durch Verschieben und Vertauschen können wir immer erreichen, daß eine Karte auf dem Feld X_1 liegt (siehe Abbildung 6). Da laut Konstruktionsvorschrift in der Ebene A, die aus den drei linken Spalten besteht, höchstens drei Karten liegen, muß auch in einer der parallelen Ebenen ein Feld belegt sein, sonst hat man weniger als sechs Karten ausgewählt. Sollte das nur bei der Ebene C, die aus den jeweils rechten Spalten besteht, der Fall sein, kann man sie mit Ebene B, die aus den jeweils mittleren Spalten besteht, austauschen. Man braucht daher nur den Fall zu betrachten, daß in B mindestens eine Karte liegt. Nun kann man B so verschieben, daß X_3 von dieser Karte belegt wird, ohne A zu bewegen: Man verschiebt C in die andere Richtung (siehe 3.5). Analog kann man erreichen, daß X_2 belegt wird, ohne die Ebene D, die aus den jeweils oberen Reihen besteht, zu beeinflussen. Die Belegung von X_4 können wir erreichen, indem wir ggf. Ebene 2 und Ebene 3 austauschen, so daß in der Ebene 2 mindestens zwei Karten enthalten sind. Das ist immer möglich, da in Ebene 1 bereits drei belegt sind und die restlichen drei demnach auf die Ebenen 2 und 3 aufgeteilt werden müssen. Eine dieser beiden Karten läßt sich durch Verschieben der Ebene 2 - Ebene 1 bleibt konstant, Ebene 3 wird entgegengesetzt verschoben - auf die Position X_4 abbilden.

Wir müssen also nur den Fall betrachten, daß X_1, X_2, X_3 und X_4 wie in der Abbildung 6 belegt werden.

	A	B	C
D	**X_1**	**X_3**	-
	X_2	-	-
	-	-	-

Ebene 1

	A	B	C
D	**X_4**	-	-
	-		-
	-	-	

Ebene 2

	A	B	C
D	-	-	-
	-	-	
	-		

Ebene 3

Abbildung 6: *Verteilung der Karten X_1 - X_4*

"-" bedeutet, daß das jeweilige Feld nicht belegt werden darf, da sonst eine Ebene mit insgesamt vier belegten Feldern oder ein Set vorliegen würde. Die gesamte Ebene 1 muß ausgeschlossen werden, da bereits die drei Karten X_1, X_2 und X_3 in ihr liegen; die Ebene A muß auch ausgeschlossen werden, da in ihr die Karten X_1, X_2 und X_4 belegt sind, und die Ebene D muß ausgeschlossen werden, da in ihr die Karten X_1, X_3 und X_4 liegen. Weiterhin muß noch die Ebene ausgeschlossen werden, auf der X_2, X_3 und X_4 liegen (vgl. Abbildung 6). Von den verbleibenden Karten in Ebene 2 muß genau eine ausgewählt werden, weil die beiden verbleibenden Karten mit X_4 sonst ein Set bilden würden, weil aber in Ebene 2 dennoch mindestens zwei Karten belegt sind.

Wählt man in Ebene 2 das mittlere Feld, so wird die rechte Spalte in Ebene 3 ausgeschlossen, da in der mittleren Spalte in Ebene 2 und der linken Spalte in Ebene 1 (diese bilden mit der genannten Spalte eine Ebene) schon drei Karten belegt sind. Analog läßt sich für die untere Reihe in Ebene 3 argumentieren - mit den bisher belegten Karten sind die Ebenen 1, 2 und 3 jeweils an der Diagonalen von links oben nach rechts unten symmetrisch. Belegt man das Feld unten rechts in Ebene 2, so kann man den Fall in den eben genannten überführen, indem man die Ebene 2 um 1 nach rechts und um 1 nach unten verschiebt; Ebene 3 verschiebt man entgegengesetzt.

Man kann also in keinem der beiden Fälle ein sechstes Feld belegen, ohne daß vier Karten auf einer Ebene liegen oder ein Set entsteht. Das steht aber im Widerspruch zu unserer Annahme, q.e.d.

4.2 Hilfssatz V für vier Eigenschaften und drei Varianten

Existiert hier eine Lösung, bei der mehr als 20 Karten ausgewählt wurden, so existiert auch eine Lösung, in der in der geometrischen Darstellung in der Ebene in der oberen dreidimensionalen Hyperebene neun Karten liegen.

Beweis durch Widerspruch:

Wir gehen davon aus, daß eine Lösung mit mehr als 20 Karten existiert, die mit den Operationen des Verschiebens und des Vertauschens nicht in eine Lösung überführt werden kann, in der in der ersten Reihe 9 Karten liegen.

Da insgesamt mehr als 20 Karten vorliegen, müssen in einer der drei parallelen Hyperebenen in der geometrischen Darstellung als waagerechte Reihen dargestellten dreidimensionalen Hyperebenen mehr als sechs Karten liegen (Schubfachprinzip).

Die Lage der Hyperebene kann nun so vertauscht werden, daß sie in der obersten Reihe liegt. Jetzt existiert also in dieser Reihe eine Ebene, auf der vier Karten liegen (vgl. 4.1).

Da auf dieser Ebene kein Set liegt, kann man drei der vier belegten Karten also so verschieben, daß sie in der Ebene ganz oben links liegen. Das Anordnungsprinzip hierzu wurde unter 4.1 dargestellt, als gezeigt wurde, daß die Felder X_1, X_2 und X_3 belegt werden können. Die vierte Karte liegt mit den ersten dreien auf einer Ebene und deshalb nach der Verschiebung auch in der Ebene ganz links oben. Zu drei Karten, die kein Set bilden, gibt es nämlich immer nur eine Ebene, auf der alle drei Karten liegen, und das ist die Ebene links oben.

Zwei Ebenen, die mit der Ebene links oben ein Set bilden, kann man nun immer so verschieben, daß sie in der oberen Reihe liegen: Man schiebt eine an die Position oben in der Mitte, die andere belegt nach dem Verschieben automatisch die setbildende Position.

Auf keinen zwei Ebenen, die mit der Ebene links oben ein Set bilden, dürfen also fünf oder mehr Karten liegen, sonst könnte man mit Hilfe des Verschiebens und Vertauschens eine Konstellation erzeugen, in den Ebenen ihrer oberen Reihe neun Karten liegen.

Es gibt nun vier Ebenenpaare, die mit der Ebene links oben ein Set bilden, denn im zweidimensionalen Set-Spiel ist jede Karte in vier Sets enthalten. Weitere Ebenen gibt es nicht (vgl. Abbildung 7). In jedem der Ebenenpaare dürfen höchstens vier Karten liegen; zusammen mit den vier Karten in der Ebene links oben sind also höchstens 20 Karten belegt. Das steht im Widerspruch zur Voraussetzung, daß mehr als 20 Karten ausgewählt wurden.

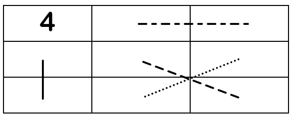

Abbildung 7: *Die mit vier Karten besetzte Ebene links oben bildet mit vier verbundenen Ebenenpaaren Sets.*

5 SET-Programm

5.1 Funktionen des Programms

Wir haben ein Computerprogramm geschrieben, das die Karten eines Set-Spiels mit beliebigen $v \geq 3$ und $n \geq 1$ verwalten kann. Man kann Karten auswählen, um zu sehen, welche anderen Karten mit diesen Sets bilden würden. Die Hauptfunktion liegt jedoch darin, die größte Anzahl von Karten ohne Set zu finden. Man kann also Karten eingeben, die auf jeden Fall vorhanden sein müssen; des weiteren kann man auch noch Karten ausschließen, die auf keinen Fall in der Lösung vorkommen sollen.

5.2 Realisierung

Das in Free Pascal [8] geschriebene Programm besteht im wesentlichen aus dem Objekt *TKarten*, das man als Set-Spiel mit beliebigen $v \geq 3$ und $n \geq 1$ instanziieren kann. Die Karten werden im Boolean-Array *Karten*, das von 0 bis v^n-1 geht (siehe 2.3), gespeichert. Im Word-Array *VerbotenVon* wird festgehalten, ob eine Karte nicht mehr ausgewählt werden darf und - wenn ja - von wem das Verbot stammt.

Die wichtigsten Methoden sind *SchliesseAus* und *GetMaxOhneSet*. Vor jedem Hinzufügen einer Karte wird *SchliesseAus* aufgerufen. Es werden zwei Parameter übergeben, nämlich die hinzuzufügende Karte *hinz* und der in *VerbotenVon* zu speichernden Wert *wert*. *SchliesseAus* kombiniert *hinz* mit v-2 anderen vorhandenen Karten und ermittelt die jeweils setbildende Karte, die, wenn es sie gibt und wenn sie noch nicht verboten wurde, in *VerbotenVon* mit *wert* markiert und somit verboten wird. Diese wird ermittelt, indem in den v-1 Karten jede Eigenschaft für sich betrachtet wird und jeweils die Häufigkeit der einzelnen Varianten gezählt wird. Kommt genau eine Variante (v-1)-mal vor, so hat die setbildende Karte auch diese; kommen alle Varianten bis auf eine genau einmal vor, so hat sie die fehlende Variante. Ansonsten gibt es keine setbildende Karte.

Zum Ermitteln der maximalen Anzahl von Karten ohne Set wird die Funktion *GetMaxOhneSet* verwendet. Sie probiert hierzu mit Hilfe der rekursiven Funktion *TryFrom*, die als Parameter eine Karte, ab der gesucht werden soll, erhält, alle Möglichkeiten durch. Mittels einer Schleifenvariable *i* wird bei alle folgenden Karten geprüft, ob die Karte noch belegt werden darf (ob *VerbotenVon[i]=frei* ist). Ist dies der Fall, wird diese belegt, *TryFrom* ruft sich selber wieder mit *i+1* als Parameter auf, und danach wird die Karte wieder entfernt. Damit das Entfernen möglichst schnell ist, werden beim Hinzufügen nur alle Karten, die noch nicht ausgeschlossen waren, markiert, und zwar erhält *VerbotenVon* den Wert, mit dem das jeweilige *TryFrom* aufgerufen wurde. So müssen beim Entfernen der Karte nicht wieder alle Karten, die davor ein Set bildeten, ermittelt werden, sondern es genügt, einfach wieder die Benutzung aller Karten zu gestatten, die jetzt in *VerbotenVon* den Wert des *TryFrom*-Parameters haben.

6 Ermittlung der größten Menge Karten ohne Set

Mit Hilfe des unter 5 beschriebenen Computerprogramms haben wir versucht, die Frage, wie viele Karten man ohne Set höchstens auslegen kann, für unterschiedliche Eigenschafts- und Variantenzahlen zu beantworten.

6.1 Trivial erschließbare Maximalzahlen

Für die Fälle v=1 und v=2 sowie n=1 lauten die Ergebnisse wie folgt:

- Bei v=1 (n beliebig) bildet jede Karte ein Set (siehe 2.6), es gibt ja auch nur eine Karte, die Maximalzahl ist 0;
- bei v=2 (n beliebig) bilden zwei Karten immer ein Set, da alle Eigenschaften immer entweder gleich oder unterschiedlich sind, die Maximalzahl ist 1;
- bei n=1 (v beliebig) existieren insgesamt v Karten, die sich alle in der einzigen Eigenschaft unterscheiden. Deswegen können maximal v-1 (sogar beliebige) Karten ausgewählt werden.

6.2 Die Maximalzahl für drei Eigenschaften und drei Varianten

Läßt man das Programm ohne Vorgaben laufen, so ergibt sich als Maximalzahl die Zahl 9. Dafür werden jedoch auf einem Pentium 100 ca. 7 Sekunden benötigt, weil alle Kombinationen durchprobiert werden.

Man erhält alle Lösungen, auch wenn man sie durch Verschieben und Vertauschen ineinander überführen kann. Von solchen Lösungen müßte allerdings nur eine erfaßt werden, denn von der Kartenzahl sind sie gleich. Wir haben daher versucht, die Rechenzeit dadurch zu verringern, daß wir uns das zunutze machen.

Da die Maximalzahl größer als fünf ist, liegen vier Karten auf einer Ebene (siehe 4.1). Nach dem gleichen Prinzip wie unter 4.2 kann man also erreichen, daß in der ersten Ebene der geometrischen Darstellung vier Karten liegen, davon drei an den Positionen X_1, X_2 und X_3 der Abbildung 6. Für die vierte Karte gibt es nun drei mögliche Positionen: Sie liegt entweder in der Mitte, unten in der Mitte oder rechts in der Mitte. Alle weiteren freien Felder bilden Sets.

Liegt sie rechts in der Mitte, kann man die Ebene aus den drei mittleren Reihe um 1 nach rechts und die Ebene aus den drei unteren Reihen um 1 nach links verschieben; ist das Feld unten in der Mitte belegt, kann man die Ebene aus den drei mittleren Spalten um 1 nach unten und die Ebene aus den drei rechten Spalten um 1 nach oben verschieben. In beiden Fällen ergibt sich die dritte Möglichkeit, bei der das 2x2 Quadrat links oben in der Ecke belegt ist.

Da man nach diesem Prinzip jede Lösung mit mehr als fünf Karten durch Verschieben und Vertauschen in eine Lösung überführen kann, in der diese Karten belegt sind, darf man sie bei der Suche nach der Maximalzahl festlegen. Tut man dies, so braucht das Programm weniger als eine Sekunde und liefert 18 Lösungen. Diese Lösungen lassen sich alle ineinander überführen, was wir im einzelnen jedoch nicht darlegen wollen.

6.3 Die Maximalzahl für das normale Set-Spiel

David van Brink hat ebenfalls mit Hilfe eines Programms [3] versucht, die Maximalzahl zu ermitteln. Sein Programm benötigt dafür eine Woche Rechenzeit, obwohl es Lösungen in den dreidimensionalen Hyperebenen vorberechnet und dabei gedrehte und gespiegelte Lösungen nicht betrachtet.

Auch mit unserem Programm dauert die Suche ohne Vorgaben sehr lange. Nach ca. 3 Sekunden hat unser Programm allerdings eine Lösung mit 20 Karten gefunden. Würde es eine Lösung mit 21 oder mehr Karten geben, so existiert laut 4.2 auch eine, bei der neun Karten in der oberen Hyperebene (geometrische Darstellung in der Zeichenebene) liegen. Da man bei drei Eigenschaften alle Lösungen mit neun Karten durch Verschieben und Vertauschen ineinander überführen kann, kann man eine beliebige Lösung in der oberen Hyperebene vorgeben.

Da nun aber auch in den unteren beiden Hyperebenen noch Karten liegen und man mit jeder der Hyperebenen beliebige Verschiebeaktionen durchführen kann, wenn man die andere Hyperebene nur in die entgegengesetzte Richtung verschiebt, kann man nun auch immer eine Karte an die Position oben links der ersten Ebene der mittleren Hyperebene verschieben. Diese Karte kann daher auch immer belegt werden.

Mit diesen Vorgaben benötigt das Programm nur ca. 22 Sekunden, um 20 als Maximalzahl zu bestätigen. Eine Lösung mit mehr als 20 Karten, die nicht durch Verschieben und Vertauschen in eine Lösung mit den genannten Eigenschaften überführt werden kann, gibt es laut 4.2 nicht, und da diese beiden Operationen die Kartenzahl nicht verändern, kann es allgemein keine Lösung mit mehr als 20 Karten geben, 20 ist Maximalzahl.

7 Untergrenze für drei Varianten

Auf den Set-Internetseiten [3] stellt David van Brink fest, daß sich bei einer Erhöhung der Zahl der Eigenschaften um 1 die Zahl der Karten, die man maximal auslegen kann, ohne daß ein Set entsteht, mindestens verdoppelt und höchstens verdreifacht. Das begründet er so (unter S_n wird hier die maximale Kartenzahl ohne Set im n-dimensionalen Set-Spiel verstanden):

> Wir können eine Untergrenze für die Maximalzahl im (n+1)-dimensionalen Setraum konstruieren, indem wir zwei n-dimensionale Hyperebene mit deren Maximalkombination füllen und die dritte frei lassen und erhalten $2S_n$ Karten.
>
> Eine Obergrenze für die Maximalzahl im (n+1)-dimensionalen Setraum bilden drei jeweils mit ihrer Maximalkombination gefüllte n-dimensionale Hyperebenen, also $3S_n$ Karten.

Der ausführliche Beweis findet sich in [3].

Wir haben uns auch mit der Suche nach Untergrenzen beschäftigt und dabei eine höhere Untergrenze gefunden.

Wir konnten ein rekursives Verfahren entwickeln, mit dem man in einem n-dimensionalen Set-Spiel - ohne ein Set zu erhalten - ein oder zwei Karten mehr auswählen kann als mit dem Prinzip der bloßen Verdopplung der (n-1)-dimensionalen Lösung - bei ungeraden n kann eine, bei geraden n können zwei Karten mehr als beim bloßen Verdoppeln belegt werden. Die nach diesem Prinzip entstehenden Kartenanordnungen nennen wir Umaxkombination (Umax=Untergrenze für die Maximalzahl auslegbarer Karten ohne Set).

Dazu geht man von einem n-dimensionalen Set-Spiel mit ungeradem n aus. Zwei (n-1)-dimensionale Hyperebenen seien bekannt, in denen je eine Umaxkombination von Karten enthalten ist - diese Hyperebenen heißen M_1 und M_2 - und die folgende Charakteristika aufweisen (unter einer 1-Hyperebene wird eine (n-1)-dimensionale Hyperebene verstanden, die in der geometrischen Darstellung in der Ebene nur rechts unten eine Karte hat):

- Zwischen zwei 1-Hyperebenen und einer M_1 bzw. M_2-Hyperebene existiert kein Set.
- Zwischen je einer M_1- und M_2-Hyperebene und einer 1-Hyperebene existiert kein Set.

Eine Umaxkombination für das n-dimensionale Set-Spiel wird nun aus einer M_1-, einer M_2- und einer 1-Hyperebene gebildet. Hier existiert laut Voraussetzung kein Set.

Auch für ein (n+1)-dimensionales Set-Spiel kann man aus M_1-Hyperebenen, M_2-Hyperebenen und 1-Hyperebenen eine Umaxkombinationen konstruieren; hier ist sogar die Konstruktion von zwei Umaxkombinationen möglich, die die Voraussetzungen für M_1 und M_2 erfüllen (siehe Abbildung 8) und es somit ermöglichen, den Rekursionsschritt nochmals durchzuführen.

M_1	M_2	1		1	1	M_2		0	0	0	
M_2	M_1	1	:=M_1	1	1	M_2	:=M_2	0	0	0	**:=1**
1	1	0		M_1	M_1	0		0	0	1	

Abbildung 8: *Die Konstruktionsvorschrift für M_1, M_2 und 1*

Jedes Kästchen (nicht jeder 3x3-Kasten!) steht hier für eine (n-1)-dimensionale Hyperebene. Setzt man an die Stelle eines Kästchens die jeweilige Hyperebene, so ergibt sich die geometrische Darstellung in der Ebene; 0 steht hierbei für eine Hyperebene ohne Kartenbelegung.

Um nachzuweisen, daß es sich wieder um Umaxkombinationen handelt, muß man zeigen, daß in ihnen kein Set vorliegt.

Die einzelnen (n-1)-dimensionalen Hyperebenen beinhalten kein Set (siehe Voraussetzung für M_1 und M_2; 0 und 1 enthalten zu wenig Karten). Zwischen den Hyperebenen kann nur ein Set vorkommen, wenn die Hyperebenen in der obigen Darstellung in Kästchen liegen, die im zweidimensionalen Set-Spiel ein Set bilden würden. In welchem Kästchen eine Hyperebene liegt, hängt nämlich auch von zwei Eigenschaften ab, und die Varianten in bezug auf diese müssen natürlich auch jeweils entweder gleich oder verschieden sein.

Ein Set kann jetzt nur vorliegen, wenn entweder unter diesen drei Hyperebenen zwei M_1-, zwei M_2- oder drei 1-Hyperebenen vorkommen. Als weitere Kombinationen aus den vorhandenen Hyperebenen M_1, M_2, 1 und 0 kommen nur Kombinationen aus einer M_1 bzw. M_2 und zwei 1-Hyperebenen, die Kombination aus je einer M_1- und M_2- sowie einer 1-Hyperebene und Kombinationen mit einer 0-Hyperebene in Frage. Diese Kombinationen enthalten entweder per Definition kein Set, oder sie enthalten eine 0-Hyperebene; dann liegt zwischen ihnen ebenfalls kein Set vor.

Bei beiden Umaxkombinationen liegt kein Set vor, denn sowohl die setbildende Hyperebene zu den beiden M_1-Hyperebenen als auch die setbildende Hyperebene zu den beiden M_2-Hyperebenen ist 0 und enthält somit keine Karte. Drei 1-Ebenen liegen ebenfalls in keinem der beiden Fälle so, daß sie ein Set bilden, denn sie sind wie die Karten in 4_1 bzw. 4_2 (siehe Abbildung 9) angeordnet, und dort existiert bekanntlich kein Set.

X	X	-		-	-	X		-	-	-	
X	X	-	:=4_1	-	-	X	:=4_2	-	-	-	:=1
-	-	-		X	X	-		-	-	X	

Abbildung 9: *Ausgangsstellung der Rekursion und Maximallösung für n=3*

Es handelt sich also in beiden Fällen um Umaxkombinationen. Damit sie aber für M_1 und M_2 eingesetzt werden können, müssen sie die oben angegebenen Bedingungen erfüllen:

- Zwischen zwei 1-Hyperebenen und einer M_1 bzw. M_2-Hyperebene existiert kein Set.

  Das ist hier der Fall, denn ein Set zwischen den Hyperebenen müßte die beiden in den 1-Hyperebenen belegten Felder beinhalten, deren setbildendes Feld ganz rechts unten in der M_1- bzw. M_2-Hyperebene ist jedoch frei - es liegt in der 0-Hyperebene (vgl. Abbildung 8).

Zwischen einer M_1-, einer M_2- und einer 1-Hyperebene darf kein Set entstehen.

Diese Bedingung ist ebenfalls erfüllt, denn auch ein hyperebenenübergreifendes Set kann nur zwischen drei (n-1)-dimensionalen Hyperebenen entstehen, wenn unter ihnen zwei M_1-, zwei M_2- oder drei 1-Hyperebenen vorhanden sind. Drei 1-Hyperebenen bilden hier aber kein Set, weil sie auf Positionen liegen, die im dreidimensionalen Setspiel kein Set bilden (vgl. die Lage der 1-Hyperebenen (Abbildung 8) und die Lage der Karten im dreidimensionalen Setspiel (Abbildung 9)).

Wären zwei M_1- bzw. M_2-Hyperebenen am Set beteiligt, so müßten diese mit der 1-Hyperebene rechts unten in der dritten (n+1)-dimensionalen Hyperebene ein Set bilden. Betrachtet man aber diese und alle (n-1)-dimensionalen M_1- und M_2-Hyperebenen, so liegen diese wiederum an Positionen, die im dreidimensionalen Set-Spiel kein Set bilden. Es kann also keine zwei M_1- oder M_2-Hyperebenen geben, die mit der 1-Hyperebene ein hyperebenenübergreifendes Set bilden.

Hiermit ist auch diese Voraussetzung erfüllt.

Man kann also mit den nach diesem rekursiven Prinzip erhaltenen Umaxkombinationen einen weiteren Rekursionsschritt durchführen, ohne daß ein Set entsteht. Den Ausgangspunkt für die Rekursion bildet die in Abbildung 9 dargestellte Maximallösung für n=3. Die Ebenen 4_1 und 4_2 erfüllen die Voraussetzungen für M_1 und M_2. So läßt sich von n=2 auf n=3 und n=4, aus den so entstandenen Lösungen für n=4 auf n=5 und n=6 und damit auf alle natürlichen Zahlen ≥3 schließen.

Erzeugt man die Umaxkombination bei einem ungeraden n, so fügt man zusätzlich zum Verdoppeln eine Karte hinzu, denn in zwei Hyperebenen liegt jeweils eine Umaxkombination für n-1 vor; die Karte der 1-Hyperebene kommt hinzu.

Erzeugt man die Umaxkombination bei einem geraden n, so fügt man zusätzlich zum Verdoppeln zwei Karten hinzu. In M_1 (Abbildung 8) liegen nämlich in den Hyperebenen, die die oberen beiden Reihen bilden, Umaxkombinationen für n-1 vor; in der Hyperebene, die die untere Reihe bildet, liegen zwei Karten. M_2 besteht aus den gleichen Hyperebenen wie M_1 und beinhaltet daher auch genauso viele Karten.

Will man nun berechnen, wie viele Karten eine Umaxlösung für n Eigenschaften enthält, so geht man von einer Ebene mit vier Karten (n=2) aus und führt die Rekursionsvorgänge nacheinander aus. Die Kartenzahl wird dabei immer verdoppelt, wobei abwechselnd 1 und 2 addiert wird. Es ergibt sich also folgende Formel:

$(((4\cdot2+1)\cdot2+2)\cdot2+1\ldots)\cdot2+2$ für gerade n und $(((4\cdot2+1)\cdot2+2)\cdot2+1\ldots)\cdot2+1$ für ungerade n, denn der letzte Summand gibt die im letzten Rekursionsschritt addierte Kartenzahl an.

Die Formel für gerade n läßt sich nun vereinfachen:

Die 4 wird mit jeder Erhöhung der Eigenschaft um 1 mit 2 multipliziert. Da die erste Verdopplung beim Schritt von n=2 auf n=3 ist, wird die 4 genau n-2 mal verdoppelt. Der erste Summand im Endergebnis ist also $4\cdot2^{n-2}=2^n$.

Die 1, die nach dem Verdoppeln der 4 addiert wird, wird einmal weniger verdoppelt, es ergibt sich $1\cdot2^{n-3}$. Die 2, die nach dem zweiten Verdoppeln addiert wird, wird noch einmal weniger verdoppelt, es ergibt sich $2\cdot2^{n-4}=2^{n-3}$. Dieser Summand ist also doppelt vorhanden. Es ergibt sich insgesamt $2\cdot2^{n-3}=2^{n-2}$. Die nächste 1 und die nächste 2 werden jeweils zweimal weniger verdoppelt, es ergibt sich als Summand 2^{n-4}. Dies kann man nun weiterführen; bei der letzten 1 und der letzten 2 entsteht der Summand 2^2. Insgesamt entsteht also folgende Summe:

$$2^n+2^{n-2}+2^{n-4}+\ldots+2^2=2^{2\cdot\frac{n}{2}}+2^{2\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)}+2^{2\cdot\left(\frac{n}{2}-2\right)}+\ldots+2^{2\cdot1}=4^{\frac{n}{2}}+4^{\frac{n}{2}-1}+4^{\frac{n}{2}-2}+\ldots+4^1=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}4^k$$

Diese Summe läßt mit Hilfe der expliziten Formel für geometrische Reihen vereinfachen: $\dfrac{4^{\frac{n}{2}+1}-4}{4-1}=\dfrac{2^{n+2}-1}{3}-1$

Den Term für ungerade n erhält man, indem man den Term für n-1 (n-1 ist gerade) verdoppelt und 1 addiert:

$$2\cdot\left(\frac{2^{(n-1)+2}-1}{3}-1\right)+1=\frac{2^{n+2}-2}{3}-1$$

Sowohl der Term für gerade als auch der für ungerade n und demnach auch ihre ersten Summanden sind ganze Zahlen. Die ersten Summanden sind nun um $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{2}{3}$ kleiner als $\frac{2^{n+2}}{3}$ und somit in beiden Fällen gleich $\left[\frac{2^{n+2}}{3}\right]$, der größten ganzen Zahl, die kleiner als $\frac{2^{n+2}}{3}$ ist. Damit ergibt sich für gerade und ungerade n dieselbe Formel.

Man kann daher bei n Eigenschaften (n≥3) immer $\left[\frac{2^{n+2}}{3}\right]-1$ Karten auswählen, ohne daß ein Set entsteht.

8 Überlegungen für zwei und drei Eigenschaften

8.1 Maximalzahl für zwei Eigenschaften

Bei zwei Eigenschaften und v Varianten lassen sich höchstens $(v-1)^2$ Karten so auslegen, daß kein Set entsteht.

Beweis: In der geometrischen Darstellung liegt ein Quadrat der Seitenlänge v vor. Belegt werden alle Felder mit Ausnahme der untersten Reihe und der Spalte ganz rechts (siehe Abbildung 10). Da also keine Karten ausgewählt werden, die in mindestens einer der beiden Eigenschaften die letzte Variante aufweisen, ist sichergestellt, daß kein Set entsteht (siehe 2.6). Die belegten Felder bilden ein Quadrat, das (v-1)² Karten ohne Set beinhaltet.

X	X	X	X	-
X	X	X	X	-
X	X	X	X	-
X	X	X	X	-
-	-	-	-	-

Abbildung 10: *Beispiel für eine Maximallösung bei fünf Varianten*

Der Beweis, daß dies die Maximalzahl ist, wird mit vollständiger Induktion geführt.

1. **Induktionsanfang:** Die Maximalzahl für v=1 ist 0, für v=2 ist sie 1 (siehe 6.1). Dies erfüllt die Bedingung.
2. **Induktionsschluß (gilt nur, wenn man auf Werte für v≥3 schließt):** Der Satz sei für v-1 Varianten bewiesen. Bei v Varianten müssen nun sowohl in einer Reihe als auch in einer Spalte je v-1 Karten liegen. Lägen nämlich in jeder Reihe höchstens v-2 Karten, so sind insgesamt höchstens $(v-2)\cdot v=v^2-2v$, also weniger als $(v-1)^2=v^2-2v+1$ Karten belegt, analog lassen sich die Spalten betrachten.
   Die Varianten der beiden Eigenschaften können aufgrund ihrer beliebigen Bezeichnung (vgl. 2.2) so umnumeriert werden, daß die Reihe mit v-1 Karten ganz oben und die Spalte mit v-1 Karten ganz links liegen. Das verbleibende Quadrat (Seitenlänge v-1) heiße A. Die Reihe und die Spalte schneiden sich demnach im Feld links oben (00). Dieses Feld ist entweder frei oder belegt.

-	X	X	X	X
X	A			
X				
X				
X				

X	X	X	X	-
X	A			
X				
X				
-				

Abbildung 11: *Mögliche Kartenbelegungen der Ebene am Beispiel v=5; linke Ebene siehe a), rechte Ebene siehe b)*

a) Ist dieses Feld *nicht belegt*, so müssen auf jeder Diagonalen von A zwei Felder frei sein, damit kein Set vorhanden sein kann.

Beweis: Ist nämlich auf einer Diagonalen nur ein Feld F nicht belegt (sollte gar kein Feld frei sein, wird ein beliebiges belegtes Feld im folgenden nicht betrachtet), so existiert ein Set. Dieses läßt sich finden, indem man folgende Karten auswählt:

1) alle belegten Felder der Diagonalen von A (insgesamt v-2 Karten, da auf jeder Diagonale von A v-1 Karten liegen, vgl. 2.7, A ist ein Quadrat mit der Seitenlänge v-1),
2) das Feld F_o, das in der obersten Reihe und in der Spalte von F liegt,
3) das Feld F_l, das in der Spalte ganz links und in der Reihe von F liegt.

Die Felder F_o und F_l sind beide belegt, da das eine in der obersten Reihe und das andere in der Reihe ganz links liegt, und beide nicht auf dem frei gelassenen Schnittfeld liegen.

Die gewählten Felder bilden nun eine Diagonale im Gesamtquadrat: In jeder Reihe und in jeder Spalte liegt nämlich genau eine der v ausgewählten Karte. Die auf der Diagonalen von A belegten Felder belegen nämlich alle Reihen bis auf die Reihe vom einzigen nicht belegten Feld F und die oberste Reihe des Gesamtquadrates - nur diese gehört nicht zu A - sowie alle Spalten bis auf die Spalte von F und die Spalte ganz links - auch hier gehört nur diese nicht zu A. F_o belegt nun die oberste Reihe und die Spalte von F; F_l belegt die Spalte ganz links und die Reihe von F. In jeder Reihe und jeder Spalte ist also genau ein Feld belegt; die Karten bilden eine Diagonale und somit ein Set.

Zu jeder Diagonalen von A existieren v-2 parallele Diagonalen in A (analog dazu, daß zu jeder Spalte in A v-2 parallele Spalten existieren), die sich paarweise nicht schneiden. In A sind also (v-1)·2 Felder frei. Hinzu kommt das freie Schnittfeld links oben, im Gesamtquadrat sind demnach mindestens $(v-1)\cdot 2+1=2v-1$ Felder nicht belegt. Insgesamt gibt es v^2 Felder; dementsprechend können höchstens $v^2-(2v-1)=v^2-2v+1=(v-1)^2$ Felder belegt sein, wenn das Feld links oben frei ist.

b) Ist das Feld links oben *belegt*, kann man die Spalten bzw. die Reihen wie bereits weiter oben begründet so vertauschen, daß das freie Feld der obersten Reihe ganz rechts und das der linken Spalte ganz unten liegt. In A darf in einerseits keine Diagonale vollständig belegt sein, weil sie sonst mit dem Feld links oben im Gesamtquadrat ein Set bilden würde, andererseits würde eine vollständig belegte Reihe in A mit dem Feld ganz links in dieser Reihe und eine vollständig belegte Spalte in A mit dem Feld ganz oben in dieser Spalte ein Set bilden. Also darf man nur die Reihe ganz unten sowie die Spalte ganz rechts in A vollständig belegen. Liegt einer dieser beiden Fälle vor, so ist dies eine Drehung um 90° vom Fall a) der Fallunterscheidung: diesmal schneidet sich die mit v-1 Karten belegte Reihe mit der mit v-1 Karten belegten Spalte in dem leeren Feld oben rechts bzw. unten links.

Ansonsten darf in A keine Reihe, keine Spalte, keine Diagonale vollständig belegt sein, also kein Set vorliegen. Für die Seitenlänge v-1 ist die Maximalzahl $(v-2)^2$ bereits bewiesen, in A sind also höchstens $(v-2)^2=v^2-4v+4$ Felder belegt. Außerhalb von A gibt es eine Spalte mit v-1 Karten und eine Reihe mit v-1 Karten. Da diese beiden die Karte links oben gemeinsam haben, liegen außerhalb von A insgesamt $2\cdot(v-1)-1=2v-3$ Karten.

Im Gesamtquadrat liegen also höchstens $(v^2-4v+4)+(2v-3)=v^2-2v+1=(v-1)^2$ Karten.

In beiden Fällen liegen höchstens $(v-1)^2$ Karten vor, wenn man voraussetzt, daß die Formel für v-1 bereits bewiesen ist. Da die Formel für v=1 und v=2 richtig ist und man von v-1 immer auf v schließen kann, ist sie allgemeingültig.

8.2 Untergrenze für die Maximalzahl bei drei Eigenschaften

Laut 6.2 ergibt sich für v=3 und n=3 die Maximalzahl 9. Für v=4 liefert das Programm zumindest in akzeptabler Rechenzeit keinen größeren Wert als 28. Beide Zahlen erfüllen die Formel $(v-1)^3+1$. Wir konnten ein Konstruktionsprinzip für alle $v\geq 3$ entwickeln, bei dessen Anwendung die auftretenden Kartenkonstellationen tatsächlich $(v-1)^3+1$ Karten ohne Set enthalten. Damit haben wir eine Untergrenze für die Maximalzahl bei n=3 gefunden.

Bei der Konstruktion orientieren wir uns an der geometrischen Darstellung in der Ebene, die einzelnen Ebenen seien von links nach rechts durchnumeriert. Die drei Eigenschaften heißen n_1, n_2 und n_3, wobei in der geometrischen Darstellung zwischen den Varianten von n_1 durch unterschiedliche Spalten, den Varianten von n_2 durch unterschiedliche Reihen und den Varianten von n_3 durch unterschiedliche Ebenen differenziert wird.

- Die ersten v-2 Ebenen werden mit je $(v-1)^2$ Karten belegt, wobei alle Felder bis auf die Spalte ganz rechts sowie die Reihe ganz unten belegt werden.
- In der (v-1)-ten Ebene wird die gesamte oberste Reihe und die gesamte linke Spalte belegt, das Schnittfeld links oben wird jedoch freigelassen.
- In der v-ten Ebene werden $(v-2)^2$ Karten belegt, wobei die oberste und unterste Reihe sowie die Spalten ganz links und ganz rechts freigelassen werden.

Ebene 1

X	X	X	X	-
X	X	X	X	-
X	X	X	X	-
X	X	X	X	-
-	-	-	-	-

Ebene 2

X	X	X	X	-
X	X	X	X	-
X	X	X	X	-
X	X	X	X	-
-	-	-	-	-

Ebene 3 (v-2)

X	X	X	X	-
X	X	X	X	-
X	X	X	X	-
X	X	X	X	-
-	-	-	-	-

Ebene 4 (v-1)

-	X	X	X	X
X	-	-	-	-
X	-	-	-	-
X	-	-	-	-
X	-	-	-	-

Ebene 5 (v)

-	-	-	-	-
-	X	X	X	-
-	X	X	X	-
-	X	X	X	-
-	-	-	-	-

Abbildung 12: *Konstruktionsvorschrift für n=3 und v=5*

In diesen Karten ist kein Set enthalten: Jeweils innerhalb der von uns bezeichneten Ebenen existieren keine Sets, die anderen möglichen Sets kann man danach unterscheiden, in welchen Eigenschaften die Karten gleich und in welchen sie verschieden sind und zeigen, daß keiner der möglichen Fälle hier vorliegt, die Kartenkombination also kein Set enthält.

Insgesamt wurden in den ersten v-2 Ebenen je $(v-1)^2$ Karten und in der (v-1)-ten Ebene eine Reihe und eine Spaltemit je v-1 Karten ausgewählt. In der v-ten Ebene wurden $(v-2)^2$ Karten belegt.
Daraus ergibt sich die Menge von $(v-1)^3+1$ ausgewählten Karten, somit ist gezeigt:

Man kann bei n=3 und jedem $v \geq 3$ eine Menge von $(v-1)^3+1$ Karten auswählen, ohne daß ein Set entsteht.

9 Schlußbetrachtung

Das Ziel unserer Arbeit war es herauszufinden, wie viele Karten man mindestens auslegen muß, damit garantiert ein Set darin enthalten ist. Diese Frage konnten wir mit Hilfe des Computerprogrammes beantworten. Während der Untersuchung dieses Problems stießen wir jedoch auf viele andere interessante Fragestellungen bzw. Verallgemeinerungen. Hier konnten wir zwar teilweise Lösungen finden, doch viele Fragen sind weiterhin offen geblieben:

- Handelt es sich bei der Untergrenze für drei Varianten auch um die Maximalzahl?
  Um diese Frage zu beantworten, könnte man das Problem auf einen affinen Raum übertragen und dort die Frage beantworten, wie viele Punkte man auswählen kann, ohne daß eine Gerade durch drei Punkte geht.
- Wie groß sind die Maximalzahlen bei anderen Variantenzahlen?
  Die Beantwortung dieser Frage wird sich allerdings schwieriger gestalten, denn die Analogien eines Set-Spiels mit drei Varianten zur mehrdimensionalen Geometrie sind nicht auf größere Variantenzahlen übertragbar: Zwei Punkte reichen dann nicht mehr aus, um Geraden zu charakterisieren.
  Auch ist das entstehende Gebilde dann kein affiner Raum mehr.
- Handelt es sich bei der Untergrenze für drei Eigenschaften auch um die Maximalzahl?
- Wie groß ist die Maximalzahl, wenn mehr Eigenschaften vorhanden sind?
- Gibt es eventuell sogar eine allgemeine Formel für die Maximalzahl bei n Eigenschaften und v Varianten?

10 Danksagung

Wir danken unserem Betreuungslehrer Friedrich Suhr, Gymnasium Oedeme, für seine Zeit und sein Engagement, Ulrich Große, Halepaghen-Schule Buxtehude, für seine Hilfe beim Formatieren unter Zeitdruck, Norbert Stüven, Johanneum Lüneburg, und Eyke Fröchtenicht, Gymnasium Oedeme, dafür, daß sie uns Literatur und Vorlesungsmitschriften zur Verfügung gestellt haben, dem Verein Talentförderung Mathematik e.V., ohne den wir uns vielleicht nie getroffen hätten, der unser Interesse an Mathematik überhaupt erst geweckt hat und in dem wir das mathematische Denken gelernt haben, der Deutschen Bahn AG für ihre Pünktlichkeit (wir hatten wirklich kaum Verspätungen!) und nicht zuletzt unseren Eltern für ihre Unterstützung und Geduld.

11 Literaturverzeichnis

11.1 Das Spiel

[1] „SET!“ © 1997 FX Schmid; © 1988, 1990 SET Enterprises, Inc.
[2] ebd.; Spielanleitung

11.2 Internetseiten

[3] „The Search For Set“ von David van Brink, URL: http://set.omino.com
[4] Eigene Bearbeitungen des Bildes auf http://set.omino.com/sdtest02.jpg
[5] Titelbild in „The Search for Set“ von David van Brink, URL: http://set.omino.com/sdtest02.jpg

11.3 Mathematische Hilfsmittel

[6] Professor Seier: Vorlesung Geometrie I, Sommersemester 1978, Mitschriften von Norbert Stüven
[7] Professor Seier: Vorlesung Geometrie II, Wintersemester 1978/79, Mitschriften von Norbert Stüven

11.4 Software für das Computerprogramm

[8] Free Pascal Compiler version 0.99.11 [1999/03/16] for i386
Copyright © 1993-98 by Florian Klaempfl
URL: http://www.brain.uni-freiburg.de/~klaus/fpc